

第 1 問

$0 \leq \alpha \leq \beta$ をみたす実数 α, β と, 2次式 $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ について,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$$

が成立しているとする。このとき定積分

$$S = \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

を α の式で表し, S がとりうる値の最大値を求めよ。

第 2 問

白黒2種類のカードがたくさんある。そのうち4枚を手もとにもっているとき、次の操作(A)を考える。

(A) 手持ちの4枚の中から1枚を、等確率 $\frac{1}{4}$ で選び出し、それを違う色のカードにとりかえる。

最初にもっている4枚のカードは、白黒それぞれ2枚であったとする。以下の(1)、(2)に答えよ。

(1) 操作(A)を4回繰り返した後に初めて、4枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2) 操作(A)を n 回繰り返した後に初めて、4枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

第 3 問

座標平面上の 3 点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, -1)$ に対し,

$$\angle APC = \angle BPC$$

をみたす点 P の軌跡を求めよ。ただし $P \neq A, B, C$ とする。

第 4 問

p を自然数とする。次の関係式で定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} a_1 = p, & b_1 = p + 1 \\ a_{n+1} = a_n + pb_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_{n+1} = pa_n + (p + 1)b_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、次の 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ。

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np, \quad b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

(2) p を 3 以上の奇数とする。このとき、 a_p は p^2 で割り切れるが、 p^3 では割り切れないことを示せ。