$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 (x^2+\alpha\beta)\,dx = 2\left(\frac{1}{3}+\alpha\beta\right) = 1$$

$\Longleftrightarrow \alpha\beta = \dfrac{1}{6}$ であり，$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ としているので，

$0 < \alpha \leqq \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ である。

$$S = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{\alpha^3}{3} - \frac{(\alpha+\beta)\alpha^2}{2} + \alpha^2\beta$$

$$= -\frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^2\beta}{2} = -\frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha}{12} \quad \left(\because \alpha\beta = \frac{1}{6}\right)$$

これを $S(\alpha)$ と書いて，$0 < \alpha \leqq \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ での増減を調べると，$S'(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2}{2} + \dfrac{1}{12} = -\dfrac{1}{2}\left(\alpha^2 - \dfrac{1}{6}\right)$ であり，今，$0 < \alpha^2 \leqq \dfrac{1}{6}$ なので，$S'(\alpha) \geqq 0$ が成立し，$S(\alpha)$ は $0 < \alpha \leqq \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ で単調増加である。よって，求める最大値は $\alpha = \beta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ のときで，$-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6\sqrt{6}} + \dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{216} + \dfrac{\sqrt{6}}{72}$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{216}(-1+3) = \dfrac{2\sqrt{6}}{216} = \dfrac{\sqrt{6}}{108}$ である。

(1) 4枚のカードの2色の枚数のパターンとしては、2枚ずつの2色、3枚と1枚の2色、4枚が同色の3通りであり、これらを順に状態A、B、Cと呼ぶことにする。変化のパターンとしては、A→B、B→AまたはB→Cの3通りであって、順に確率は1、3/4、1/4である。

よって、4回繰り返して初めて状態Cになるのは、最初が状態Aなので、A→B→A→B→Cと変化することであり、その確率は

$$1\times\frac{3}{4}\times 1\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$ である。

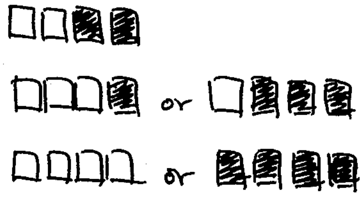
(2) 1回目がA→Bであり、2回目以降にk回B→Aを繰り返した後のn回目にB→Cが発生することなので、$1+2k+1=n$であって、状態Cになるのは偶数回目とわかる。よって、求める確率は

nが奇数のときには0

nが偶数のときには、$k=\frac{n}{2}-1$なので

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$$

状態P
Q
R



状態間の遷移は，確率を表示すると

$$P \underset{\frac{3}{4}}{\overset{1}{\rightleftarrows}} Q \xrightarrow[\frac{1}{4}]{} R \circlearrowleft 1$$

(1) さいしょ状態Pからはじまって，

$$P \xrightarrow{1} Q \xrightarrow{\frac{3}{4}} P \xrightarrow{1} Q \xrightarrow{\frac{1}{4}} R$$

となる確率なので　$1 \times \frac{3}{4} \times 1 \times \frac{1}{4} = \underline{\frac{3}{16}}$

(2) 操作(A)をn回繰り返して状態P, Q, Rになる確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n とすると，

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 0 \\ r_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = 0 \\ q_1 = 1 \\ r_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_{n+1} = \frac{3}{4} q_n & \cdots\text{①} \\ q_{n+1} = p_n & \cdots\text{②} \\ r_{n+1} = \frac{1}{4} q_n + r_n. & \cdots\text{③} \end{cases}$$

①,②より　$q_{n+2} = p_{n+1} = \frac{3}{4} q_n.$

$q_0 = 0$ より　nが偶数のとき　$q_n = 0$

$q_1 = 1$ より　nが奇数のとき　$q_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

求める確率は，④より

$$r_n - r_{n-1} = \frac{1}{4} q_{n-1} = \begin{cases} \underline{0} & (n\text{が奇数}) \\ \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \underline{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}} & (n\text{が偶数}) \end{cases}$$

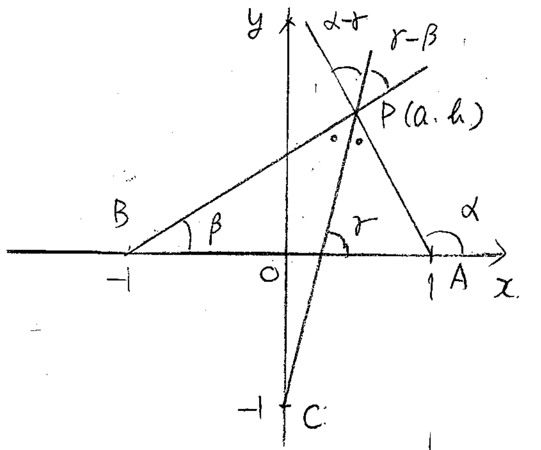
P(a, b) とおく

i) $a=0$ のとき. $b \neq -1$ ならば

$\angle APC = \angle BPC$ は明らか.

$b=-1$ のときは P と C が一致し 条件満たさず.

$\therefore$ $\underline{a=0,\ b\neq -1}$ は条件をみたす



ii) $a \neq 0, \pm 1$ のとき,

直線AP, BP, CP が x 軸の正の向きとなす角を順に α, β, γ とすると.（反時計回りを正）

$\tan\alpha = \dfrac{b}{a-1}$, $\tan\beta = \dfrac{b}{a+1}$, $\tan\gamma = \dfrac{b+1}{a}$

$\tan|\alpha-\gamma| = \tan|\gamma-\beta|$ が必要

$$\frac{|\tan\alpha - \tan\gamma|}{1+\tan\alpha\tan\gamma} = \frac{|\tan\gamma - \tan\beta|}{1+\tan\gamma\tan\beta}$$

$$\frac{\left|\dfrac{b}{a-1} - \dfrac{b+1}{a}\right|}{1+\dfrac{b}{a-1}\cdot\dfrac{b+1}{a}} = \frac{\left|\dfrac{b+1}{a} - \dfrac{b}{a+1}\right|}{1+\dfrac{b+1}{a}\cdot\dfrac{b}{a+1}}$$

$(a^2+a+b^2+b)\,|-a+b+1| = (a^2-a+b^2+b)\,|a+b+1|$

（ア） $(-a+b+1)(a+b+1) \geqq 0$ のとき

$\{(a^2+b^2+b)+a\}\{-a+(b+1)\} = \{(a^2+b^2+b)-a\}\{a+(b+1)\}$

$-(a^2+b^2+b)a - a^2 + (a^2+b^2+b)(b+1) + a(b+1)$

$=(a^2+b^2+b)a - a^2 + (a^2+b^2+b)(b+1) - a(b+1)$

$\therefore\ -a(a^2+b^2-1)=0$ 　 $a \neq 0$ より $\underline{a^2+b^2=1}$

（イ） $(-a+b+1)(a+b+1) < 0$ のとき

$\{(a^2+b^2+b)+a\}\{-a+(b+1)\} = -\{(a^2+b^2+b)-a\}\{a+(b+1)\}$

$\therefore\ -a^2+(a^2+b^2+b)(b+1)=0$

$b\{a^2+(b+1)^2\}=0$

$a \neq 0$ より $\underline{b=0}$

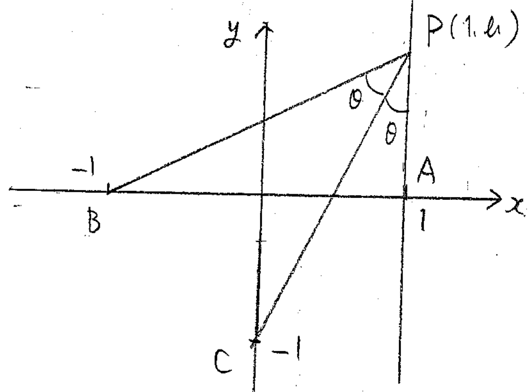
iii) $a=\pm 1$ のとき

$a=1$ とする. $b<0$ のときは $\angle APC > 90° > \angle BPC$ となり

条件をみたさない. $b=0$ のときも条件成立せず

$\angle APC = \angle BPC = \theta$ とすると

$\tan\theta = \dfrac{1}{b+1}$, $\tan 2\theta = \dfrac{2}{b}$ より $\dfrac{2}{b} = \dfrac{\frac{2}{b+1}}{1-\left(\frac{1}{b+1}\right)^2}$ ↑



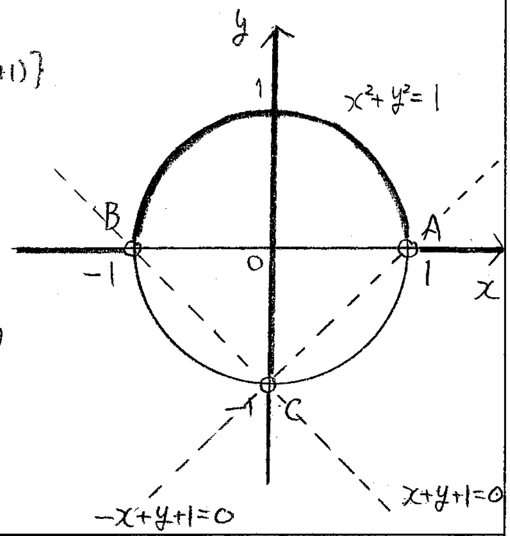
↑ $1-\dfrac{1}{(b+1)^2} = \dfrac{b}{b+1}$

$(b+1)^2-1 = b(b+1)$

$\therefore$ $b=0$ となって条件みたさず

以上の (a, b) を (x, y) として

以下の太線部（白丸は含まず）



$\cos\angle APC = \cos\angle BPC$

$$\rightleftarrows \frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|} = \frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|}$$

$$\rightleftarrows |\overrightarrow{PB}|(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}) = |\overrightarrow{PA}|(\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC})$$

ここで $P(x,y)$ とおくと

$\overrightarrow{PA}=(1-x,-y)$, $\overrightarrow{PB}=(-1-x,-y)$, $\overrightarrow{PC}=(-x,-1-y)$

であり、条件は

$$\sqrt{(1+x)^2+y^2}\left\{(x-1)x+y(1+y)\right\}=\sqrt{(1-x)^2+y^2}\left\{(1+x)x+y(1+y)\right\}$$

$$\left\{(1+x^2+y^2)+2x\right\}\left\{(x^2+y^2+y)-x\right\}^2=\left\{(1+x^2+y^2)-2x\right\}\left\{(x^2+y^2+y)+x\right\}^2$$

(＊) ここで両辺2乗したので十分性が失われている。

ここで $1+x^2+y^2=z$, $x^2+y^2+y=w$ とおいて見やすくすると、

$$(z+2x)(w-x)^2=(z-2x)(w+x)^2$$

$$z\left\{(w-x)^2-(w+x)^2\right\}+2x\left\{(w-x)^2+(w+x)^2\right\}=0$$

$$z\left\{-4xw\right\}+2x\left\{2w^2+2x^2\right\}=0$$

$$x\left\{-zw+w^2+x^2\right\}=0$$

$$x\left\{w(w-z)+x^2\right\}=0$$

$$x\left\{w(y-1)+x^2\right\}=0$$

$$x\left\{(x^2+y^2+y)(y-1)+x^2\right\}=0.$$

$$x\left\{x^2y+y^3-y\right\}=0$$

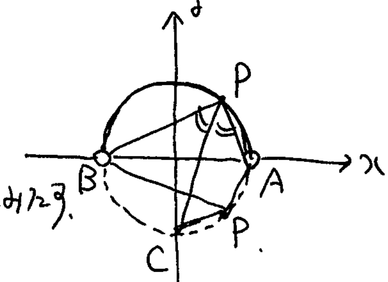
$$xy(x^2+y^2-1)=0$$

すなわち、$P(x,y)$ は

$x=0$（y軸）, $y=0$（x軸）, $x^2+y^2-1=0$（単位円）

のいずれかに乗っていることが必要である。

十分性については、図を描いて調べる。



(i) 単位円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $P(x,y)$ について、

第1象限、第2象限のとき、条件 $\angle APC=\angle BPC$ をみたす。

（$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ 上の円周角）

第3象限、第4象限のときは、不適

(ii) y軸上の点$P(x, y)$について

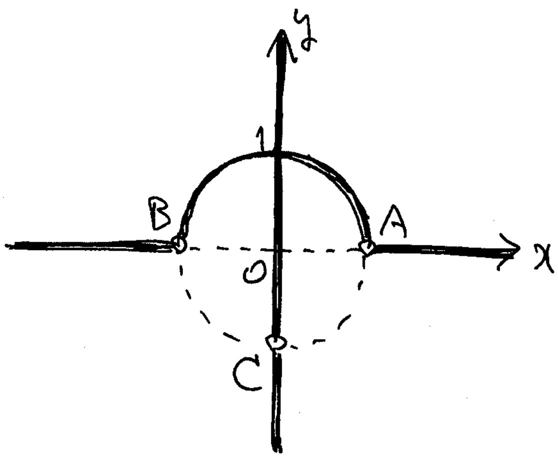
y軸はABの垂直二等分線なので、Cを除くすべての点で

つねに $\angle APC = \angle BPC$ をみたす。

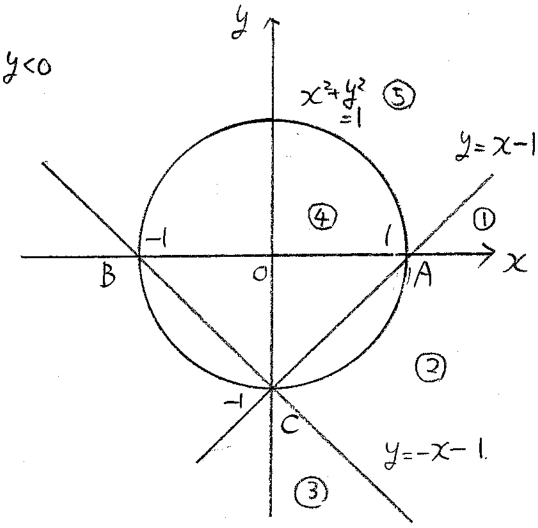
(iii) x軸上の点$P(x, y)$について、

単位円の外にPがあれば、$\angle APC = \angle BPC$ となる。

以上から、求めるPの軌跡は次のようになる



対称性より $x \geqq 0$ の領域のみを考える



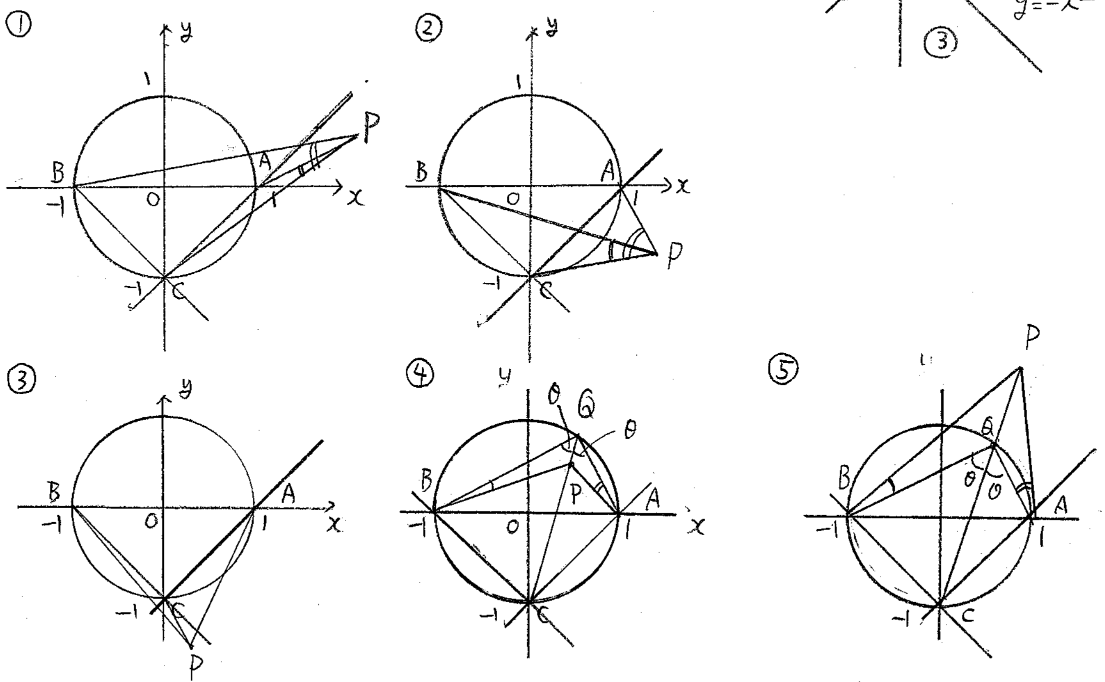
まず ① $0<y<x-1$, ② $-x-1<y<x-1$ かつ $y<0$

③ $y<-x-1$, ④ $x^2+y^2<1$, $y>x-1$.

⑤ $x^2+y^2>1$, $y>x-1$ の5つの領域にPがある場合を考える.

①では∠BPCの内部にAが, ②では∠APCの内部にBがあるので ∠APC=∠BPCとはなり得ない

③においても, ∠APC > ∠BPC は明らか.



④において CP と円 $x^2+y^2=1$ との交点をQとすると

$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$ より ∠AQC=∠BQC (=θ)

このとき ∠APC=θ−∠QAP, ∠BPC=θ−∠QBP

A,P,Q を通る円で同じ半径をもち, PQを弦とする円を反対側に作ると Bは明らかにその円の外にある

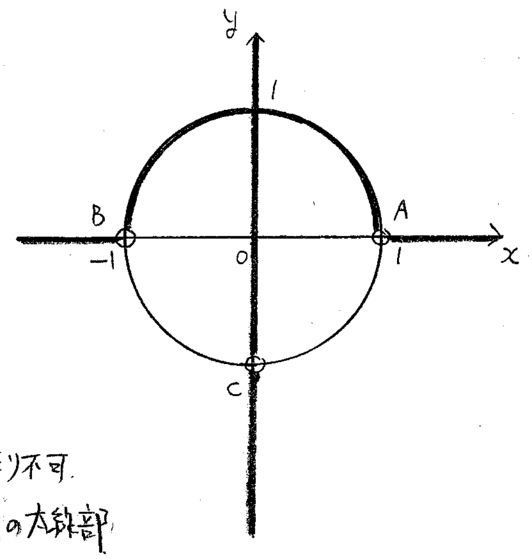
よって ∠QAP > ∠QBP ∴∠APC ≠ ∠BPC

⑤においても同様に ∠APC ≠ ∠BPC が示せる.

以上より ①〜⑤の領域に条件をみたす点はない.

残る境界線上では $y=\pm x-1$ 上でいずれかの角が0となり不可.

残った点の集合はいずれも条件をみたす よって軌跡は右図の太線部



(1) nについての帰納法で示す。

$n=1$のとき

$$\left.\begin{aligned} &a_1-\frac{1\cdot 0}{2}p^2-1\cdot p=a_1-p=p-p=0 \\ &b_1-1\cdot 0\cdot p^2-1\cdot p-1=b_1-p-1=(p+1)-p-1=0 \end{aligned}\right\}$$

はともにp^3で割りきれる。

あるnで、整数k, lを用いて

$$\begin{cases} a_n-\dfrac{n(n-1)}{2}p^2-np=kp^3 \\ b_n-n(n-1)p^2-np-1=lp^3 \end{cases}$$

とおくと、$n+1$のとき

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=a_n+pb_n \\ &=\left(kp^3+\frac{n(n-1)}{2}p^2+np\right)+p\left(lp^3+n(n-1)p^2+np+1\right) \\ &=p^3\{k+lp+n(n-1)\}+\frac{(n+1)n}{2}p^2+(n+1)p \end{aligned}$$

∴ $a_{n+1}-\frac{(n+1)n}{2}p^2-(n+1)p$ はp^3で割りきれる。

$$\begin{aligned} b_{n+1}&=pa_n+(p+1)b_n \\ &=p\left(kp^3+\frac{n(n-1)}{2}p^2+np\right)+(p+1)\left(lp^3+n(n-1)p^2+np+1\right) \\ &=p^3\left\{kp+l(p+1)+\frac{n(n-1)}{2}+n(n-1)\right\}+(n+1)np^2+(n+1)p+1 \end{aligned}$$

∴ $b_{n+1}-(n+1)np^2-(n+1)p-1$ はp^3で割りきれる。

すなわち、$n+1$のときの命題の成立も示されている。　　終

(2) (1)の結果において$n=p$とすれば、

$$a_p-\frac{p(p-1)}{2}p^2-p^2=a_p-\left\{\frac{p(p-1)}{2}+1\right\}p^2$$

はp^3の倍数なのでp^3qとおける（qは整数）

$$a_p=p^3q+\left\{\frac{p(p-1)}{2}+1\right\}p^2=p^2\left\{\left(q+\frac{p-1}{2}\right)p+1\right\}$$

いま、a_pはp^2で割りきれている。……①

pは3以上の奇数なので$\frac{p-1}{2}$は整数となり

$\{\ \}$内はpで割って1余る数となっている。

つまり、a_pはp^3で割りきれない……②

①、②により題意は証明された。　∴終