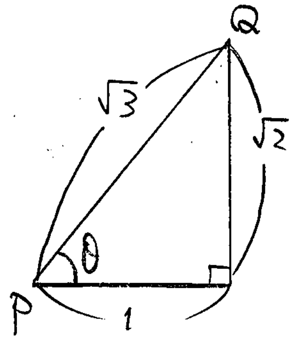
2004年度東大入試

文系第１問／理系第１問

$P(s, s^2)$ とおくと, $\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{a}{\sqrt3}, \sqrt{\frac23}a\right)$ であり,

$Q\left(s+\frac{a}{\sqrt3}, s^2+\sqrt{\frac23}a\right)$ と表すことができて.



Q も $y=x^2$ をみたすから

$$s^2+\sqrt{\frac23}a=\left(s+\frac{a}{\sqrt3}\right)^2=s^2+\frac{2}{\sqrt3}sa+\frac{a^2}{3}$$

$$\iff \frac{2}{\sqrt3}s=\sqrt{\frac23}-\frac{a}{3}\quad (\because a>0)$$

$$\iff s=\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt3}{6}a$$; である。

Pのまわりに $\overrightarrow{PQ}$ を±60°回転したものがRであるが, 上図で $45^\circ<\theta<60^\circ$ が明らかなので, −60°の回転のときのRは不適である。Rを与える複素数を $X+Yi$ とすれば;

$$X+Yi-(s+s^2i)=\frac{1+\sqrt3 i}{2}\times a\,\frac{1+\sqrt2 i}{\sqrt3}$$

$$=\left(\frac{\sqrt3}{6}-\frac{\sqrt2}{2}\right)a+\left(\frac{\sqrt6}{6}+\frac12\right)ai$$

$$\Rightarrow\begin{cases} X=\left(\frac{\sqrt6}{6}-\frac{\sqrt2}{2}\right)a+s=\frac{\sqrt2}{2}(1-a) \\ Y=\left(\frac{\sqrt6}{6}+\frac12\right)a+s^2=\left(\frac{\sqrt6}{6}+\frac12\right)a+\frac12-\frac{\sqrt6}{6}a+\frac{a^2}{12} \\ \quad =\frac{a^2}{12}+\frac{a}{2}+\frac12 \end{cases}$$

$R(X, Y)$ も $Y=X^2$ をみたすので.

$$\frac{a^2}{12}+\frac{a}{2}+\frac12=\frac12(1-a)^2=\frac12-a+\frac{a^2}{2}$$

$$\iff \frac{5}{12}a^2=\frac32 a \iff a=\frac32\times\frac{12}{5}=\underline{\frac{18}{5}}$$

$(\because a>0)$

2004年度東大入試

理系第２問

(1) nを自然数とし、

$$n = 10n_1 + n_2$$
$$(n_1 \in \mathbb{N},\ n_2 = 0, 1, \cdots 9)$$

とおくと、3桁以上の平方数は

$$n^2 = 100n_1^2 + 20n_1n_2 + n_2^2 \quad \cdots ①$$

と表せる。

n_1, n_2は0以上の整数であるから、
①より n^2の10の位、1の位は

$$\left.\begin{array}{ll} 10の位： & (20n_1n_2の10の位) + (n_2^2の10の位) \\ 1の位： & (n_2^2の1の位) \end{array}\right\} \cdots ②$$

$20n_1n_2$の10の位は $2n_1n_2$の1の位に等しく、
$2n_1n_2$は偶数であることから、n^2の10の位、1の位の偶奇は
②より n_2^2の偶奇と一致する。

$n_2 = 0, 1, \cdots 9$ より

$$n_2^2 = 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 \quad \cdots ③$$

となる。

ここで $a+l$が偶数であることから、a, lの偶奇は一致する。
③より、そのようなn_2^2は $0, 4, 64$ のみである。

よって、lは 0 または 4 である。

(2) 題意を満たす平方数は

$$n^2 = 10000n_3 + 1111 \times n_4$$
$$(n_3 \in \mathbb{N},\ n_4 = 0, 1, 2, \cdots 9)$$

と表せる。(1)より、$a+l = 2n_4$ となるので、$l = 0$ または 4 である。

ここで $l = 4$ とすると、

$$n^2 = 10000n_3 + 4444$$

となる。右辺が4の倍数であるから、nは偶数となるので、$n = 2n'$とおくと

$$4n'^2 = 10000n_3 + 4444$$

$$n'^2 = 2500n_3 + 1111$$

したがって n'^2の10の位、1の位はともに1となる。しかしこれは(1)に反する。

よって、$l \neq 4$ となるため、$l = 0$ である。

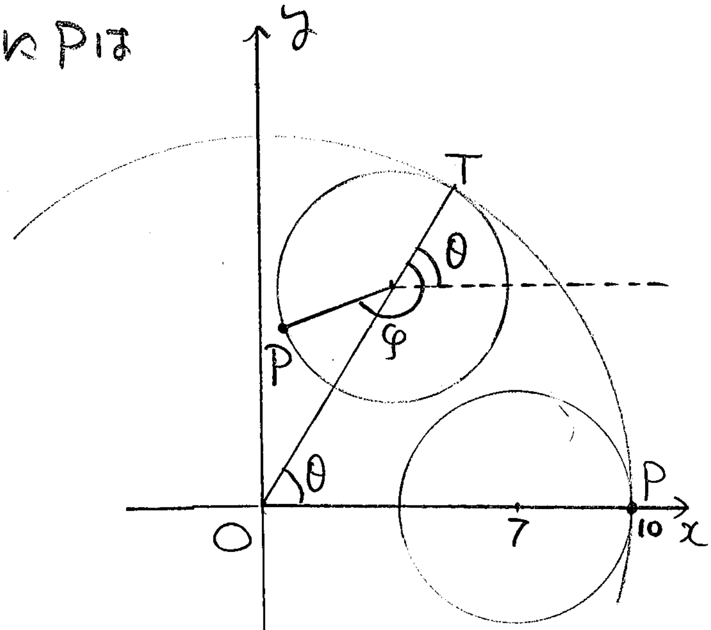
このとき、

$$n^2 = 10000n_3$$

より、平方数n^2は 10000 で割り切れる。

理系第３問

$C: x^2+y^2=10^2$ とし、最初にPは$(10, 0)$にあったとする。



Cの弧としてTPは10θ、小円の弧としてTPが3φであり、これらが等しいことから

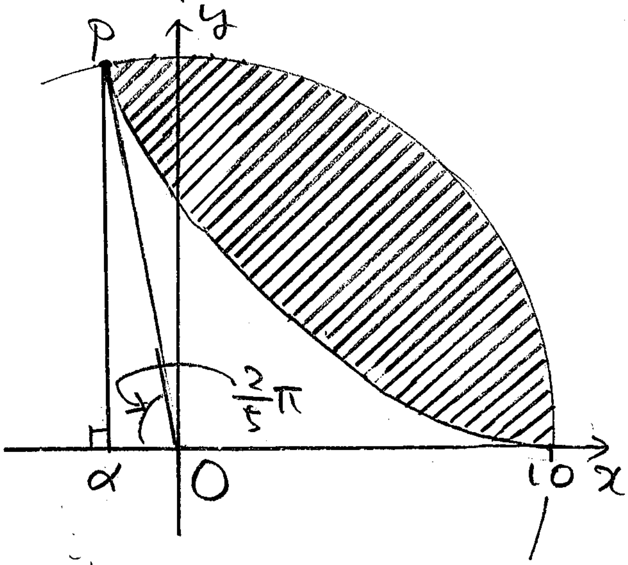
$$\varphi = \frac{10}{3}\theta$$

よって、$P(x, y)$は

$$\begin{cases} x = 7\cos\theta + 3\cos(\theta - \varphi) \\ \quad = 7\cos\theta + 3\cos\left(\theta - \frac{10}{3}\theta\right) \\ \quad = 7\cos\theta + 3\cos\frac{7}{3}\theta \rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -7\sin\theta - 7\sin\frac{7}{3}\theta \\ y = 7\sin\theta + 3\sin\left(-\frac{7}{3}\theta\right) = 7\sin\theta - 3\sin\frac{7}{3}\theta \end{cases}$$

Pが再び円C上に来るのは、$\varphi = 2\pi$として $3\varphi = 10\theta$ を考えればよく、$\theta = \frac{6\pi}{10} = \frac{3}{5}\pi$ のときである。

求める2つの面積の一方は右図の斜線部分であり、その面積は



$$\frac{3}{10}\pi\times10^2 + \frac{10\cos\frac{2}{5}\pi \times 10\sin\frac{2}{5}\pi}{2}$$
$$= 30\pi + 25\sin\frac{4}{5}\pi$$
$$= 30\pi + 25\sin\frac{\pi}{5}$$

（扇形と直角三角形）

から、$\int_{\alpha}^{10} y\,dx = \int_{\frac{3}{5}\pi}^{0} y(\theta)\cdot\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta$ を引いた値である。

$$\left(7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\right)\left(-7\sin\theta-7\sin\frac{7}{3}\theta\right)$$
$$=-49\sin^2\theta-28\sin\theta\sin\frac{7}{3}\theta+21\sin^2\frac{7}{3}\theta$$
$$=-\frac{49}{2}(1-\cos 2\theta)-14\left(\cos\frac{4}{3}\theta-\cos\frac{10}{3}\theta\right)$$
$$+\frac{21}{2}\left(1-\cos\frac{14}{3}\theta\right)$$

と、半角公式（2倍角公式）と積和の公式を用いて変形されるので、積分の値は

$$\int_0^{\frac{3}{5}\pi}\left(14-\frac{49}{2}\cos 2\theta+14\cos\frac{4}{3}\theta-14\cos\frac{10}{3}\theta+\frac{21}{2}\cos\frac{14}{3}\theta\right)d\theta$$
$$=\left[14\theta-\frac{49}{4}\sin 2\theta+\frac{21}{2}\sin\frac{4}{3}\theta-\frac{21}{5}\sin\frac{10}{3}\theta+\frac{9}{4}\sin\frac{14}{3}\theta\right]_0^{\frac{3}{5}\pi}$$
$$=\frac{42}{5}\pi-\frac{49}{4}\sin\frac{6}{5}\pi+\frac{21}{2}\sin\frac{4}{5}\pi-\frac{21}{5}\sin 2\pi+\frac{9}{4}\sin\frac{14}{5}\pi$$

ここで、$\sin\frac{6}{5}\pi=-\sin\frac{\pi}{5}$、$\sin\frac{4}{5}\pi=\sin\frac{\pi}{5}$、$\sin\frac{14}{5}\pi=\sin\frac{\pi}{5}$

であることから、さらに

$$=\frac{42}{5}\pi+\left(\frac{49}{4}+\frac{21}{2}+\frac{9}{4}\right)\sin\frac{\pi}{5}=\frac{42}{5}\pi+25\sin\frac{\pi}{5}$$

と、できる。よって、斜線部の面積は

$$30\pi+25\sin\frac{\pi}{5}-\left(\frac{42}{5}\pi+25\sin\frac{\pi}{5}\right)=\frac{108}{5}\pi$$

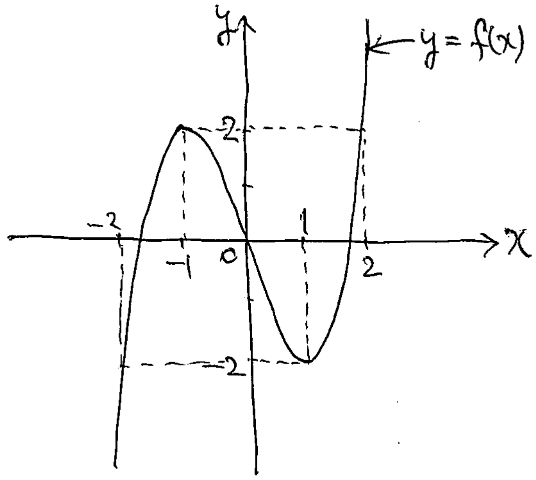
である。Cが囲む全体の面積が100πなので、2つの部分の面積とは、$\frac{108}{5}\pi$ と $\frac{500-108}{5}\pi=\frac{392}{5}\pi$ である。

2004年度東大入試

理系第４問

(1) $y=f_1(x)=x^3-3x$ と $y=a$

のグラフの交点の個数を調べればよい。



$$\begin{cases} a<-2,\ 2<a \text{ のとき } 1\text{個} \\ a=\pm 2 \text{ のとき } 2\text{個} \\ -2<a<2 \text{ のとき } 3\text{個} \end{cases}$$

(2) $f_2(x)=f_1(f_1(x))=a$ をみたす。

$f_1(x)$ の値の個数から調べはじめる。

$a<-2,\ 2<a$ のとき

$f_1(x)$ の値は1個であり、その値は

$f_1(x)<-2,\ 2<f_1(x)$ を満たすから

x の値は1個に決まる。

$a=2$ (or -2) のとき

$f_1(x)=-1$ (or 1) の1個であり、

x の値は3個となる。

$-2<a<2$ のとき

$f_1(x)$ の値は3個あり、それらは

いずれも $-2<f_1(x)<2$

を満たすから、各々について x の値は

3個ずつあって、合わせて9個。

まとめると、

$$\begin{cases} a<-2,\ 2<a \text{ のとき } 1\text{個} \\ a=\pm 2 \text{ のとき } 3\text{個} \\ -2<a<2 \text{ のとき } 9\text{個} \end{cases}$$

(3) $f_n(x)=a$ $(-2<a<2)$ をみたす

実数 x の個数が 3^n であること ----(＊)

を示せば十分である。(＊)を、n に関する

数学的帰納法によって示す。

$n=1,2$ のときについては (1)(2)より

それぞれ3個、9個であり、(＊)は成立する。

ある n で(＊)の成立を仮定してみる。

$$f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))=a \quad (-2<a<2)$$

をみたす $f_n(x)$ の値は3つあるから、これらを

t_1, t_2, t_3 とする。ここでグラフより

$$-2<t_i<2 \quad (i=1,2,3)$$

であることに注意する。

$$f_n(x)=t_i \quad (-2<t_i<2)$$

をみたす実数 x は仮定により 3^n 個ある。

$i=1,2,3$ について各々 3^n 個あるから、

実数 x は $3\times 3^n=3^{n+1}$ 個だけ存在する。

つまり $n+1$ のときも(＊)は成立する。

(＊)が示されたので、とくに $a=0$ とすれば

題意が示される。 (終)

理系第４問

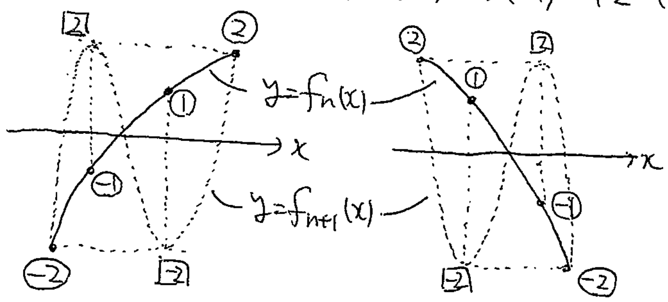
(3) (別解)

$$f_{n+1}(x) = f_n(x)^3 - 3f_n(x)$$

より，

$f_n(x) = \pm 2 \Leftrightarrow f_{n+1}(x) = (\pm 2)^3 - 3(\pm 2) = \pm 2$ (複号同順)

$f_n(x) = \pm 1 \Leftrightarrow f_{n+1}(x) = (\pm 1)^3 - 3(\pm 1) = \mp 2$ (〃)



したがって 上図より，−2〜2 の間で変化する区間は

$y=f_{n+1}(x)$ では −2〜2 の間で変化する 3つの区間に分けられる．

$y=f_1(x)$ では −2〜2 の間で変化する区間は 3つあるので

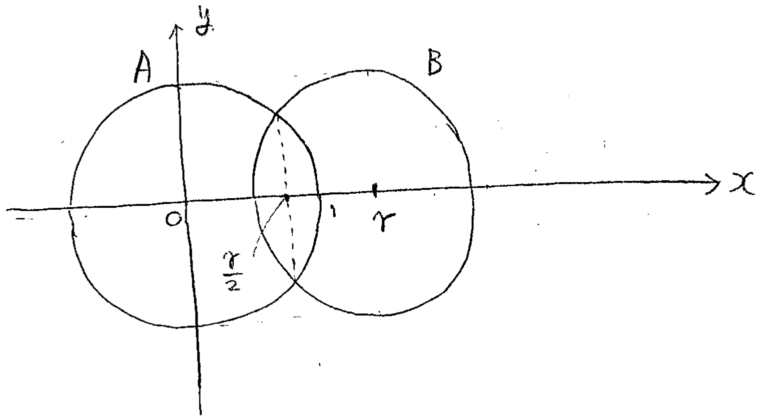
$y=f_n(x)$ では 3^n 個あり，それぞれの区間で $f_n(x)=0$ の解が少なくとも1つある。

$f_n(x)$ の定義より $f_n(x)$ は高々 3^n 次式であるので

$f_n(x)=0$ の解は 3^n 個ある。

2004年度東大入試

理系第５問



(1) $0<r \leqq 2$ のとき

球Aと球Bに共に含まれる部分の体積を V_1 とすると

$$V_1 = 2\int_{\frac{r}{2}}^{1} \pi y^2 dx$$

$$= 2\pi \int_{\frac{r}{2}}^{1} (1-x^2) dx$$

$$= 2\pi \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{\frac{r}{2}}^{1}$$

$$= 2\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{r}{2} + \frac{r^3}{24} \right)$$

よって求める体積 V は

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 2 - V_1 = \pi\left(\frac{4}{3} + r - \frac{r^3}{12}\right)$$

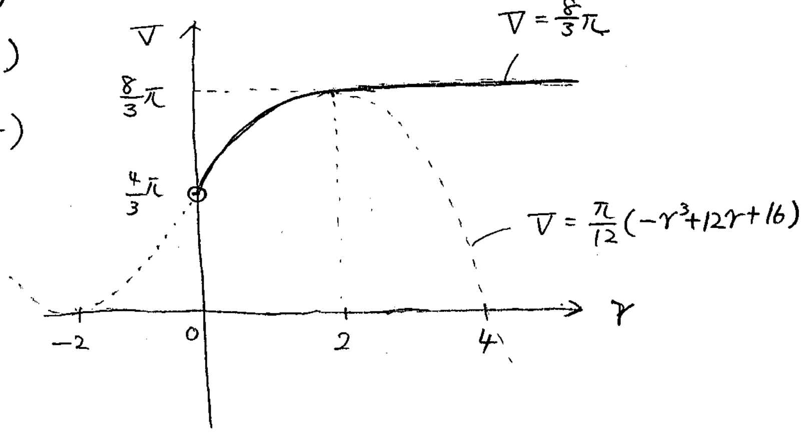
$$= \frac{\pi}{12}(-r^3+12r+16)$$

$$= \frac{\pi}{12}(r+2)^2(4-r)$$

$$V' = \frac{\pi}{12}(-3r^2+12)$$

$$= -\frac{\pi}{4}(r+2)(r-2) = 0 \text{ のとき } r = \pm 2$$

r	0		2
V'		$+$	0
V	$\frac{4}{3}\pi$	↗	$\frac{8}{3}\pi$



$2 \leqq r$ のとき　明らかに $V = \frac{8}{3}\pi$　以上よりグラフは右図のとおり

(2) $0<r \leqq 2$ で V は単調増加　$8 < \frac{8}{3}\pi$ ($\because \pi > 3$) より $V=8$ となる r は　$0<r<2$ でただ1つ.

$r=1$ とすると $V = \frac{9\pi}{4} < 8$

$r=\frac{3}{2}$ とすると $V = \frac{\pi}{12}\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{5}{2} = \frac{245\pi}{96}$

ここで　$96 \times 8 = 768$

$3.14 < \pi$ から　$3.14 \times 245 < 245\pi$　$\therefore 768 < 769.3 < 245\pi$

つまりこのとき　$8 < V$ となる.

すなわち求める r は　$1 < r < \frac{3}{2}$ をみたす.

ただ, $r=\frac{5}{2}$ のときの V と 8 との差は小さいので $r=1.45$ を調べてみる

$$V = \frac{\pi}{12}(3.45)^2 \times 2.55 < \frac{3.45^2 \times 2.55}{12} \times 3.15 = \frac{21\cdot 69^2 \cdot 51}{4\cdot(20)^4}$$

($\because \pi < 3.15$)

ここで　$21 \cdot 69^2 \cdot 51 = 5099031$

$4 \times (20)^4 \times 8 = 5120000$

より　$V < \frac{21\cdot 69^2\cdot 51}{4\cdot(20)^4} < 8$

$\therefore$ 求める r は　$1.45 < r < 1.5$ をみたす.　以上より　$\underline{\underline{r = 1.5}}$

2004年度東大入試

理系第6問

(1) 3回の操作の後に「黒 白白」となるのは

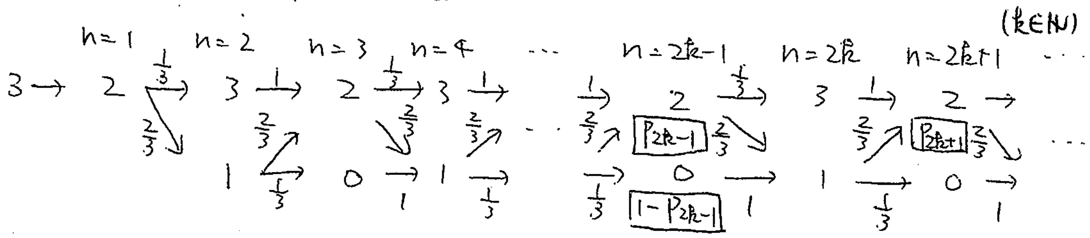
i) 左端を3回裏返す

ii) 左端を1回，中央もしくは右端を2回裏返す

のいずれかである。よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\cdot {}_3C_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{17}{27}}}$$

(2) 白の枚数の変化を樹形図で表すと，



ここで 白が2枚となる確率を P_n とおくと，図より

$$P_{2k+1} = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot P_{2k-1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot P_{2k-1} + 1\cdot\frac{2}{3}\cdot(1-P_{2k-1})$$

$$= \frac{1}{9}P_{2k-1} + \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ P_{2k+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{9}\left(P_{2k-1} - \frac{3}{4}\right)$$

$$= \cdots = \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\left(P_3 - \frac{3}{4}\right)$$

ここで P_3 は (1)の3倍であるから $P_3 = \frac{17}{9}$

$$\therefore\ P_{2k+1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{9} - \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{36}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^{k} + \frac{3}{4}$$

求める確率を g_n とおくと，

i) nが偶数のとき ($n=2k$)，g_nは「白白白」となる確率で，図より

$$g_n = \frac{1}{3}\cdot P_{2k-1} = \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$

ii) nが奇数のとき ($n=2k+1$)，g_nは「白黒白」となる確率で，これは P_{2k+1} の $\frac{1}{3}$になる

$$\therefore\ g_n = \frac{1}{3}\cdot P_{2k+1} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{9}\right)^{k} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} + \frac{1}{4}$$

以上より，求める確率は

nが偶数のとき $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$，$n$が奇数のとき $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} + \frac{1}{4}$