

第 1 問

xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件をみたしている。

$\triangle PQR$ は一辺の長さ a の正三角形であり、点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき、 a の値を求めよ。

第 2 問

a を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時にみたす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする。

$$y \geq x^2$$

$$y \leq -2x^2 + 3ax + 6a^2$$

領域 D における $x + y$ の最大値, 最小値を求めよ。

第 3 問

関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を次で定める。

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$g(x) = \{f(x)\}^3 - 3f(x)$$

$$h(x) = \{g(x)\}^3 - 3g(x)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $f(x) = a$ をみたす実数 x の個数を求めよ。
- (2) $g(x) = 0$ をみたす実数 x の個数を求めよ。
- (3) $h(x) = 0$ をみたす実数 x の個数を求めよ。

第 4 問

片面を白色に、もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ、次の操作を繰り返す。

さいころを振り、出た目が 1, 2 であれば左端の板を裏返し、3, 4 であれば真中の板を裏返し、5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば、最初、板の表の色の並び方が「白白白」であったとし、1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば、色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば、色の並び方は「黒白白」となる。

- (1) 「白白白」から始めて、3 回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。
- (2) 「白白白」から始めて、 n 回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする。
 p_{2k+1} (k は自然数) を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。