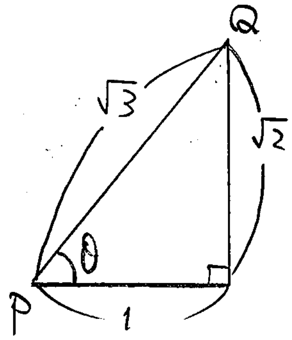
2004年度東大入試

文系第１問／理系第１問

P(s, s^2) とおくと、$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}a\right)$ であり、

Q$\left(s+\frac{a}{\sqrt{3}}, s^2+\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)$ と表すことができて、



Q も $y=x^2$ をみたすから

$$s^2+\sqrt{\frac{2}{3}}a=\left(s+\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2=s^2+\frac{2}{\sqrt{3}}sa+\frac{a^2}{3}$$

$$\iff \frac{2}{\sqrt{3}}s=\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{a}{3} \quad (\because a>0)$$

$$\iff s=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}a \ ;$$ である。

P のまわりに $\overrightarrow{PQ}$ を $\pm 60^\circ$ 回転したものが R であるが、上図で $45^\circ<\theta<60^\circ$ が明らかなので、-60° の回転のときの R は不適である。R を与える複素数を $X+Yi$ とすれば；

$$X+Yi-(s+s^2 i)=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times a\,\frac{1+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a+\left(\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{1}{2}\right)ai$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X=\left(\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a+s=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a) \\ Y=\left(\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{1}{2}\right)a+s^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{1}{2}\right)a+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}a+\frac{a^2}{12} \\ \quad =\frac{a^2}{12}+\frac{a}{2}+\frac{1}{2} \end{cases}$$

R(X, Y) も $Y=X^2$ をみたすので、

$$\frac{a^2}{12}+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1-a)^2=\frac{1}{2}-a+\frac{a^2}{2}$$

$$\iff \frac{5}{12}a^2=\frac{3}{2}a \iff a=\frac{3}{2}\times\frac{12}{5}=\underline{\frac{18}{5}}$$

$$(\because a>0)$$

2004年度東大入試

文系第２問

$$\begin{cases} y=x^2 & \cdots ① \\ y=-2x^2+3ax+6a^2 & \cdots ② \end{cases}$$

①=②より $3x^2-3ax-6a^2=0$

$3(x+a)(x-2a)=0$

$x=-a,\ 2a$

$a>0$より ①,②は必ず2点A,Bで交わる

また $y=-2\left(x-\frac{3}{4}a\right)^2+\frac{57}{8}a^2$より 軸は $x=\frac{3}{4}a$

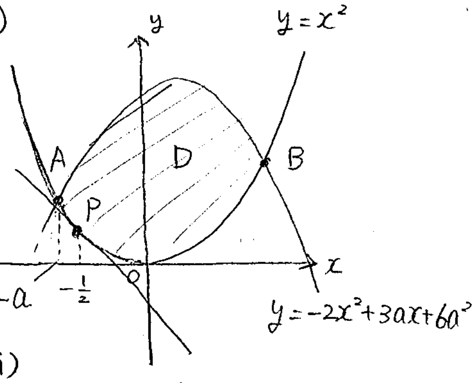
$-a<\frac{3}{4}a<2a$より ②の頂点は ①の放物線の内部にある。

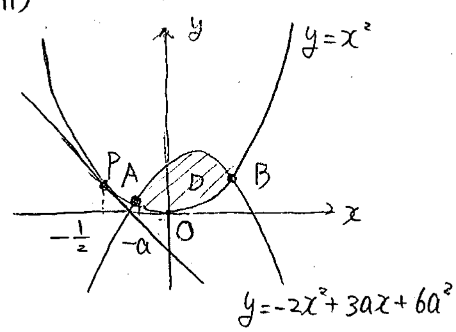
$y=-x+k$と ①との接点Pのx座標は $y'=2x=-1$より

$x=-\frac{1}{2}$

$y=-x+k$と ②との接点Qのx座標は $y'=-4x+3a=-1$より

$x=\frac{3a+1}{4}$





最小値について考えると 図 i), ii) にみるように

領域Dの境界上にPが存在するか否かで場合分けが生じる

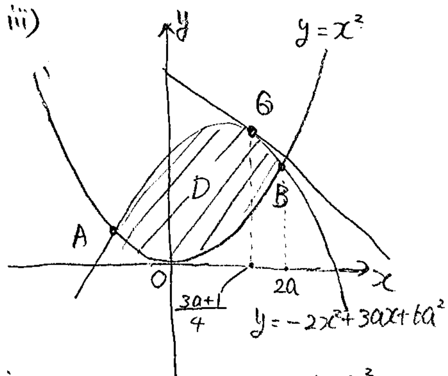
i) $-a\leqq-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\leqq a$ ならば $x+y=k$が 点Pを通るとき, $x+y$は

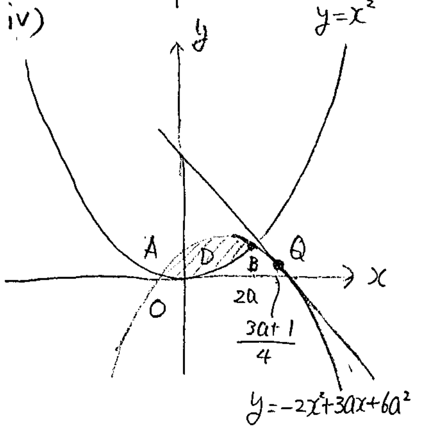
$x+y=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$ という最小値をとる

ii) $-\frac{1}{2}\leqq-a<0 \Leftrightarrow 0<a\leqq\frac{1}{2}$ ならば $x+y=k$が 点Aを通るとき,

$x+y$は

$x+y=-a+(-a)^2=a^2-a$ という最小値をとる





最大値について考えると 図 iii), iv) にみるように

領域Dの境界上にQが存在するか否かで場合分けが生じる

iii) $\frac{3a+1}{4}\leqq 2a \Leftrightarrow \frac{1}{5}\leqq a$ ならば $x+y=k$が 点Qを通るとき, $x+y$は

$x+y=\frac{3a+1}{4}+\left(\frac{3a+1}{4}\right)^2=\frac{57a^2+6a+1}{8}$

という最大値をとる.

iv) $0<2a\leqq\frac{3a+1}{4} \Leftrightarrow 0<a\leqq\frac{1}{5}$ ならば, $x+y=k$が 点Bを通るとき,

$x+y$は

$x+y=2a+(2a)^2=4a^2+2a$

という最大値をとる.

以上より

$0<a\leqq\frac{1}{5}$ のとき　最小値 a^2-a,　最大値 $4a^2+2a$

$\frac{1}{5}\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき　最小値 a^2-a,　最大値 $\frac{57a^2+6a+1}{8}$

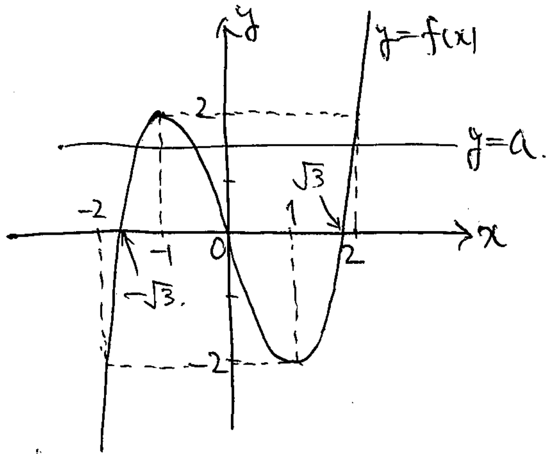
$\frac{1}{2}\leqq a$ のとき　最小値 $-\frac{1}{4}$　最大値 $\frac{57a^2+6a+1}{8}$

2004年度東大入試

文系第３問

(1) $y=f(x)=x^3-3x$ と $y=a$

のグラフの交点の個数を調べればよい。

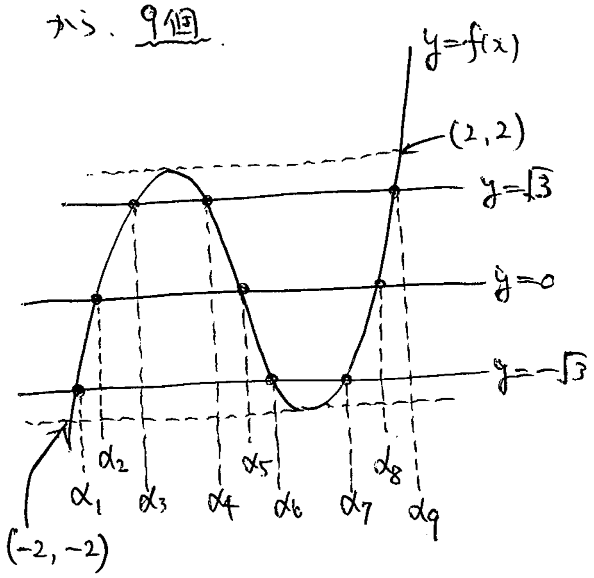


$$\begin{cases} a<-2,\ 2<a & \text{のとき 1個} \\ a=\pm 2 & \text{のとき 2個} \\ -2<a<2 & \text{のとき 3個} \end{cases}$$

(2) $g(x)=0 \rightleftarrows f(f(x))=0$

$\rightleftarrows f(x)=-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$

(1)より $f(x)=-\sqrt{3}$, $f(x)=0$, $f(x)=\sqrt{3}$ は各々3個ずつの解をもち，これらは重複しないから，9個



(3) $h(x)=0 \rightleftarrows f(g(x))=0$

$\rightleftarrows g(x)=-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$

$\rightleftarrows f(f(x))=-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$

ここで $y=f(x)$ と3直線 $y=-\sqrt{3}$, $y=0$, $y=\sqrt{3}$ には9個の交点がある。これらのx座標を $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_9$ とする。

前図より

$-2<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_9<2$

としてよい。すると，

$h(x)=0$

$\rightleftarrows f(x)=\alpha_1$ or $f(x)=\alpha_2$ or $\cdots$

$\cdots$ or $f(x)=\alpha_9$

$y=f(x)$ と9直線 $y=\alpha_i$ $(i=1,2,\cdots,9)$ との間には $3\times 9=27$ 個の交点が存在し，これらのx座標が $h(x)=0$ の解となる。

よって 27個

2004年度東大入試

文系第４問

(1) 3回の操作の後に「黒 白白」となるのは

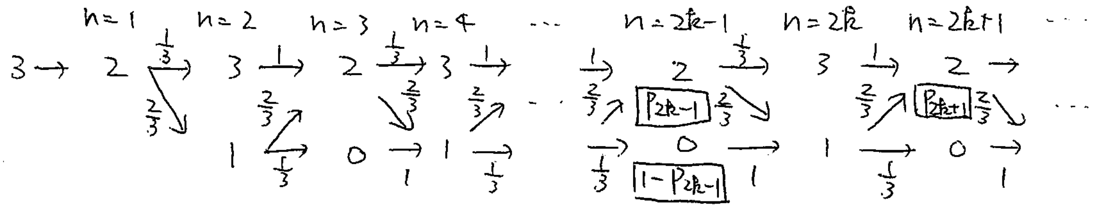
i) 左端を3回裏返す.

ii) 左端を1回，中央もしくは右端を2回裏返す.

のいずれかである。よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\cdot {}_3C_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{7}{27}}}$$

(2) 白の枚数の変化を樹形図で表すと.



求める確率は白が2枚のときであるから，図より.

$$p_{2k+1} = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot p_{2k-1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot p_{2k-1} + 1\cdot\frac{2}{3}\cdot(1-p_{2k-1})$$
$$= \frac{1}{9}p_{2k-1} + \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ p_{2k+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{9}\left(p_{2k-1} - \frac{3}{4}\right)$$
$$= \cdots = \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\left(p_3 - \frac{3}{4}\right)$$

ここで p_3 は (1)の 3倍であるから $p_3 = \frac{7}{9}$

$$\therefore\ p_{2k+1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{9} - \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}$$
$$= \frac{1}{36}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} + \frac{3}{4}$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^{k} + \frac{3}{4}}}$$